76 測地測量 令和５年　午後 No.２問 D

問D．水準点 S、水準点 T、水準点 U の成果改定を行うため、図２－３に示す路線において水準測量を行い、表２－３の観測結果を得た。図２－３の(1)～(4)は水準路線の路線番号である。網平均計算を行い水準点標高の最確値を求め、最確値と表２－４の改定前の標高を比較して最も変動が大きい水準点を調べたい。次の各問に答えよ。

ただし、既知点は水準点 G とし、水準点 G の標高は 10.418m とする。

なお、関数の値が必要な場合は、巻末の関数表を使用すること。

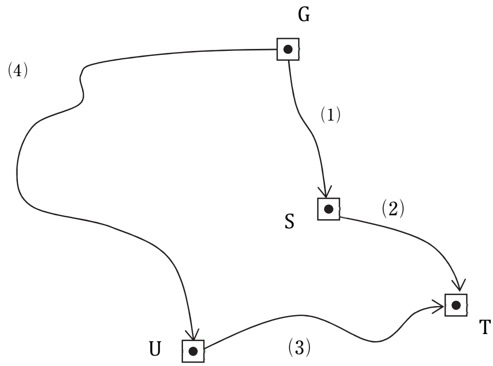

図２－３

表２－３

路線番号	路線方向	観測距離	観測高低差
(1)	G→S	1km	+16.187m
(2)	S→T	1km	－3.304m
(3)	U→T	2km	+3.977m
(4)	G→U	4km	+8.941m

表２－４

水準点	改定前の標高
S	26.612m
T	23.329m
U	19.368m

問Ｄ－１．表２－５に示す路線(1)における観測高低差の残差 V_{GS} の観測方程式に倣い、路線(2)、(3)、(4)における観測高低差の残差 V_{ST}、V_{UT}、V_{GU} の観測方程式をそれぞれ解答欄に記せ。

ただし、水準点Ｓ、水準点Ｔ、水準点Ｕの仮定標高は、表２－４に示す改定前の標高を用い、仮定標高の補正量は X_S、X_T、X_U で表すものとする。

表２－５

路線(1)	$V_{GS} = X_S + 0.007$
路線(2)	$V_{ST} =$
路線(3)	$V_{UT} =$
路線(4)	$V_{GU} =$

問Ｄ－２．未知数 X の係数行列を A、定数項のベクトルを L とすると観測方程式は式２－１となる。ここで、問Ｄ－１で求めた観測方程式を行列表記すると式２－２となる。

また、観測距離に応じた重量の行列を P とすると、P は式２－３で表される。式２－２及び式２－３の $\boxed{ア}$ ～ $\boxed{サ}$ に入る適当な数値を、それぞれ解答欄に記せ。

$$V = AX - L \quad \cdots\cdots \text{式２－１}$$

$$\begin{pmatrix} V_{GS} \\ V_{ST} \\ V_{UT} \\ V_{GU} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boxed{ア} & \boxed{イ} & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{ウ} \\ 0 & 0 & \boxed{エ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_S \\ X_T \\ X_U \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \boxed{オ} \\ \boxed{カ} \\ \boxed{キ} \\ \boxed{ク} \end{pmatrix} \quad \cdots \text{式２－２}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{ケ} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{コ} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{サ} \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots \text{式２－３}$$

問Ｄ－３．正規方程式は、式２－４で表される。正規方程式を解き、各水準点の最確値を求めたとき、変動が最も大きい水準点は水準点 S、水準点 T、水準点 U のどれか。解答欄に記せ。

また、その点の改定前の標高と最確値の差の絶対値を mm 単位で、小数第１位を四捨五入し、整数で求め解答欄に記せ。

$X = (A^{\mathrm{T}}PA)^{-1}A^{\mathrm{T}}PL$ …… 式２－４

なお、$\mathrm{A^T}$ は行列 A の転置行列である。また、問Ｄ－２で求めた A、Pを用いると式２－４の$(A^{\mathrm{T}}PA)^{-1}$は式２－５となる。

$$(A^{\mathrm{T}}\mathrm{PA})^{-1} = \begin{pmatrix} 0.875 & 0.750 & 0.500 \\ 0.750 & 1.500 & 1.000 \\ 0.500 & 1.000 & 2.000 \end{pmatrix}$$ …… 式２－５

問D

問D－1

$V_{\mathrm{ST}} = X_T - X_S + 0.021$
$V_{\mathrm{UT}} = X_T - X_U - 0.016$
$V_{\mathrm{GU}} = X_U + 0.009$

観測方程式は、各新点の仮定標高（H）への補正量（X）と、各路線の観測比高（Δh）への補正量である残差（V）の行列により表示され、各路線において以下の式が成り立つ。

V＝（到着点H＋到着点X）－（出発点H＋出発点X）－Δh

すべての路線を上の式に当てはめると、以下のようになる。なお、Gは既知点であるため仮定標高がない。

$V_{GS} = (H_S + X_S) - H_G - \Delta h_1$
$V_{ST} = (H_T + X_T) - (H_S + X_S) - \Delta h_2$
$V_{UT} = (H_T + X_T) - (H_U + X_U) - \Delta h_3$
$V_{GU} = (H_U + X_U) - H_G - \Delta h_4$

$V_{GS} = (26.612 + X_S) - 10.418 - 16.187$
$V_{ST} = (23.329 + X_T) - (26.612 + X_S) - (-3.304)$
$V_{UT} = (23.329 + X_T) - (19.368 + X_U) - 3.977$
$V_{GU} = (19.368 + X_U) - 10.418 - 8.941$

$V_{GS} = X_S + 0.007$
$V_{ST} = X_T - X_S + 0.021$
$V_{UT} = X_T - X_U - 0.016$
$V_{GU} = X_U + 0.009$

問Ｄ－２

ア	－1
イ	1
ウ	－1
エ	1
オ	－0.007
カ	－0.021
キ	0.016
ク	－0.009
ケ	1
コ	0.5
サ	0.25

ア　－1 ／ イ　1 ／ ウ　－1 ／ エ　1

オ　－0.007 ／ カ　－0.021 ／ キ　0.016 ／ ク　－0.009

$$
\begin{aligned}
V_{GS} &= X_S - (-0.007) \\
V_{ST} &= -X_S + X_T - (-0.021) \\
V_{UT} &= X_T - X_U - 0.016 \\
V_{GU} &= X_U - (-0.009)
\end{aligned}
$$

行列で表記すると、以下のようになる。

$$
\begin{bmatrix} V_{GS} \\ V_{ST} \\ V_{UT} \\ V_{GU} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_S \\ X_T \\ X_U \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.007 \\ -0.021 \\ 0.016 \\ -0.009 \end{bmatrix}
$$

ケ　1　／　コ　0.5　／　サ　0.25

重量は路線長に反比例することになるため、各路線の重量（P）は、以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
P_1 &= 1／1.00 = 1.00 \\
P_2 &= 1／1.00 = 1.00 \\
P_3 &= 1／2.00 = 0.50 \\
P_4 &= 1／4.00 = 0.25
\end{aligned}
$$

この重量の行列を P とすると、対角行列となり、

$$
P = \begin{bmatrix} 1.00 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.00 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}
$$

となる。

問Ｄ－３

変動が最も大きい水準点	水準点Ｕ
改訂前の標高と最確値の差の絶対値	27mm

観測方程式から新点の最確標高を求める正規方程式は、以下の式となる。

$$(A^TPA)\ X = A^TPL$$

これを変形すると、問題に与えられた以下の式となる。

$$X = A^TPL(A^TPA)^{-1}$$

まず、A の転置行列は、

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

となるため、A^TP は、

$$A^TP = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0.25 \end{bmatrix}$$

となる。
A^TPL は、

$$\begin{bmatrix} 1 \times -0.007 + -1 \times -0.021 \\ 1 \times -0.021 + 0.5 \times 0.016 \\ -0.5 \times 0.016 + 0.25 \times -0.009 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.014 \\ -0.013 \\ -0.01025 \end{bmatrix}$$

となり、$(A^TPA)^{-1}$ は、問題に示されているため、$X = A^TPL(A^TPA)^{-1}$ は、

$$\begin{bmatrix} X_S \\ X_T \\ X_U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.014 \\ -0.013 \\ -0.01025 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.875 & 0.75 & 0.5 \\ 0.75 & 1.5 & 1 \\ 0.5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.014 \times 0.875 - 0.013 \times 0.75 - 0.01025 \times 0.5 \\ 0.014 \times 0.75 - 0.013 \times 1.5 - 0.01025 \times 1 \\ 0.014 \times 0.5 - 0.013 \times 1 - 0.01025 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.002625 \\ -0.01925 \\ -0.0265 \end{bmatrix}$$

となる。よって、もっとも変動が大きい水準点は、水準点Ｕであり、差の絶対値は、0.0265m＝26.5mm≒27mm と求めることができる。