



2 数の性質②

出典
国税庁

「10, 11」のように2つの連続する2ケタの整数を、それぞれ2乗して足し合わせた数のうち、一の位が3となるのはいくつあるか。

1. 12
2. 14
3. 16
4. 18
5. 20

〈方針〉

1 の位だけを扱うことに注目する。

〈解説〉

x を 2 ケタの自然数としたとき、 $x=10k+a$ ($1 \leq k \leq 9$, $0 \leq a \leq 9$, また k, x とともに自然数)と表すことができる。連続する 2 つの整数 $x, x+1$ の 2 乗の和を計算すると、

$$\begin{aligned} x^2 + (x+1)^2 &= 2x^2 + 2x + 1 \\ &= 2(10k+a)^2 + 2(10k+a) + 1 \\ &= 10(20k^2 + 4ka + 2k) + 2a^2 + 2a + 1 \end{aligned}$$

これより、 $x^2 + (x+1)^2$ の 1 の位の数は $2a^2 + 2a + 1 = a^2 + (a+1)^2$ によるので、この式がどのような値をとるのかを考える。

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a^2 + (a+1)^2$	1	5	13	25	41	61	85	113	145	181
$a^2 + (a+1)^2$ の 1 の位	1	5	3	5	1	1	5	3	5	1

上の表より、連続した 2 つの整数の 2 乗の和の 1 の位が 3 となる a の値は 2 と 7 のみであることが分かる。また、とりうる k の値は 1 ～ 9 までの 9 つあり、 x は組 (a, k) により決まるので、求める自然数 x の個数は $2 \times 9 = 18$ より 18 個。したがって、正解は肢 4。

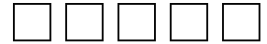
正解

4



3 数の性質③

出典
地方上級



次の3つの数式①，②，③のA，B，Cには3，4，5のいずれかの整数が当てはまり，□には「+」，「×」のいずれかの記号が入る。同じ位置に入る記号は①，②，③とも同じである。①，②，③の計算結果は全て異なるが，①の計算結果と②，③どちらかの計算結果との差は10である。

$$A \square B \square 6 \square C \cdots \textcircled{1}$$

$$(A \square B) \square 6 \square C \cdots \textcircled{2}$$

$$A \square B \square (6 \square C) \cdots \textcircled{3}$$

次のうち，正しいものはどれか。

1. Aに当てはまる整数は5である。
2. 4の左隣の記号は「×」である。
3. Bに当てはまる整数は3である。
4. 5の右隣の記号は「×」である。
5. Cに当てはまる整数は4である。

〈方針〉

まず、記号と数字のどちらを先に考えるかに着目する。

□には＋か×かの2つの選択肢しかないため、こちらのほうが限定しやすく、本問では記号を先に考える。

また、四則計算の順番からして、「×が先、＋が後」である。3つの数式の計算結果は異なり、□には同じ位置に同じ記号が入るため、式中の「()」によって計算の順番が変わったと考えられ、この点からも＋か×かを決定しやすい。

〈解説〉

3つの数式の計算結果が異なることから、中央の□には×が入る。

$$\left(\begin{array}{l} \rightarrow + \text{であれば,} \\ A \square B + 6 \square C \quad \cdots \textcircled{1} \\ (A \square B) + 6 \square C \cdots \textcircled{2} \\ A \square B + (6 \square C) \cdots \textcircled{3} \end{array} \right) \text{となり、左右の}\square\text{に関係なく計算結果が変わらない。}$$

また、3つの数式によって()がある場合とない場合がある左右の□は、×では計算結果が変わらなくなってしまうので、＋が入る。

以上から、3式は以下のとおりになる。

$$A + B \times 6 + C \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$(A + B) \times 6 + C \cdots \textcircled{2}$$

$$A + B \times (6 + C) \cdots \textcircled{3}$$

また、 $\textcircled{2} - \textcircled{1} = 5A > 0$ より $\textcircled{2} > \textcircled{1}$ 、 $\textcircled{3} - \textcircled{1} = BC - C = C(B - 1) > 0$ より $\textcircled{3} > \textcircled{1}$ 。

よって、②、③は①より大きい値をとる。

(i) ②が①より10大きい場合

$$A + B \times 6 + C + 10 = (A + B) \times 6 + C$$

$$10 = 5A \text{ より } A = 2 \text{ だが、} A > 2 \text{ より不適。}$$

(ii) ③が①より10大きい場合

$$A + B \times 6 + C + 10 = A + B \times (6 + C)$$

$$10 = C(B - 1)$$

$$10 = 5 \times 2 \text{ かつ } C \geq 3 \text{ より、} C = 5, B = 3 \text{ よって、} A = 4$$

以上より③のみが正しいことが分かる。したがって、正解は肢3。

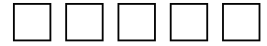
正解

3



4 数の性質④

出典
地方上級



$(10 \textcircled{a} 3) \boxed{X} (10 \textcircled{b} 4) \boxed{Y} (10 \textcircled{c} 5) \boxed{Z} (10 \textcircled{d} 6) = 10$ という等式がある。この等式の $\textcircled{a}$, $\textcircled{b}$, $\textcircled{c}$, $\textcircled{d}$ には + または - のいずれか, $\boxed{X}$, $\boxed{Y}$, $\boxed{Z}$ には, $\times$ または $\div$ のいずれかの記号が入る。この時, $\textcircled{c}$, $\boxed{Z}$, $\textcircled{d}$ に入る記号の組み合わせとして正しいものは次のうちどれか。

- | | $\textcircled{c}$ | $\boxed{Z}$ | $\textcircled{d}$ |
|----|-------------------|-------------|-------------------|
| 1. | + | $\div$ | - |
| 2. | - | $\times$ | + |
| 3. | - | $\div$ | - |
| 4. | - | $\times$ | - |
| 5. | + | $\times$ | + |

〈方針〉

括弧の間の $\boxed{X}$, $\boxed{Y}$, $\boxed{Z}$ に入る演算記号が $\times$ または $\div$ であること, ならびに, $10 = 2 \times 5$ であることから, 4つの括弧内の演算結果を見通しつつ 10 の約数である 2 と 5 を残す (2 と 5 を約数にもたない数を除いていく) ことが目的となる。

〈解説〉

$$(10 \textcircled{A} 3) \boxed{X} (10 \textcircled{B} 4) \boxed{Y} (10 \textcircled{C} 5) \boxed{Z} (10 \textcircled{D} 6) = 10 \cdots \textcircled{1}$$

まず, $(10 \textcircled{A} 3)$ の部分に注目する。 $\textcircled{A}$ が $+$ の場合, 素数 13 は 10 の約数に含まれないため, 13 の倍数で割る作業が必要になる。しかし, 他の括弧の部分で 13 を作ることはできないため, $\textcircled{A}$ は $-$ となる。 $10 - 3 = 7$ となるので, $\textcircled{1}$ は以下のとおり変形できる。

$$7 \boxed{X} (10 \textcircled{B} 4) \boxed{Y} (10 \textcircled{C} 5) \boxed{Z} (10 \textcircled{D} 6) = 10 \cdots \textcircled{2}$$

素数 7 は 10 の約数に含まれないため, 他の部分で 7 の倍数を作り, 割る必要がある。これは $\boxed{X} (10 \textcircled{B} 4)$ の部分で $\boxed{X}$ を $\div$, $\textcircled{B}$ を $+$ にすることで可能となる。つまり, $7 \div (10 + 4) = 0.5$ とできる。よって,

$$0.5 \boxed{Y} (10 \textcircled{C} 5) \boxed{Z} (10 \textcircled{D} 6) = 10$$

ここで $(10 \textcircled{C} 5)$ の部分に注目をする。 $\textcircled{C}$ が $-$ であれば 5 を作ることができ, 残る $0.5 \boxed{Z} (10 \textcircled{D} 6)$ の部分で 2 が作れないかを考える。0.5 を 4 倍すれば 2 になるので, $(10 \textcircled{D} 6)$ の $\textcircled{D}$ に $-$ をいれ, $0.5 \times (10 - 6) = 2$ とすればよい。

以上から, 最終的な式は以下のとおりになる。

$$(10 - 3) \div (10 + 4) \times (10 - 5) \times (10 - 6) = 10$$

以上から, 正解は肢 4。

正解

4